DOI 10.15826/B978-5-7996-2935-9.05

СЕМЕЙСТВО МЕТРИК В ПРОСТРАНСТВАХ КЕПЛЕРОВЫХ ОРБИТ

К. В. Холшевников
Санкт-Петербургский государственный университет,
Институт прикладной астрономии РАН

Рассматриваются пятимерное пространство непрямолинейных кеплеровых орбит и четыре его фактор-пространства. В последних отождествляются орбиты вне зависимости от значений долгот узлов, значений аргументов перицентров, значений долгот узлов и аргументов перицентров, значений долгот узлов и аргументов перицентров при фиксированных долготах перицентров. Все указанные пространства (за исключением последнего) превращаются в метрические введением подходящих метрик. Приводятся рабочие формулы для вычисления расстояний между орбитами по их кеплеровым элементам. Что касается последнего фактор-пространства, то построенная для него функция пары орбит удовлетворяет первым двум аксиомам метрического пространства. Справедливость третьей аксиомы (аксиомы треугольника) пока не доказана и не опровергнута. Введенные пространства орбит вместе с метриками являются хорошим инструментом для задач поиска близких орбит и отождествления родительских тел в кометно-астероидно-метеороидных комплексах.

FAMILY OF METRICS IN THE SPACE OF KEPLERIAN ORBITS

K. V. Kholshevnikov
Saint-Petersburg State University,
Institute of Applied Astronomy Russian Academy of Sciences

Five-dimensional space of non-rectilinear Keplerian orbits is considered, as well as four its quotient spaces. In the last ones orbits are identified irrespective of values of longitudes of nodes, values of arguments of pericentres, values of both longitudes of nodes and arguments of pericentres, values of longitudes of nodes and arguments of pericentres under fixed values of longitudes of pericentres. All these spaces (except the last one) becomes metric spaces by introducing a suitable metric. Usable formulae for calculation of distances between orbits via their Keplerian elements are given. As to the last quotient space, the constructed for it function of a pair of orbits satisfies first two axioms of metric spaces. The validity of the third axiom (triangle axiom) is not demonstrated or disproved yet. The introduced orbital spaces, together with metrics, serve as a good tool for problems of searching close orbits, and identification of parent bodies in comet-asteroid-meteoroid complexes.

Введение

Во многих областях астрономии требуется оценить близость кеплеровых орбит $\mathcal{E}_s(\epsilon_k)$ как точек в некотором 5-мерном пространстве $\mathbb{H}$. Чаще всего сравниваются две орбиты, и тогда $s = 1, 2$; ϵ_k — пять независимых элементов, однозначно определяющих орбиту. Полезно также сравнивать не только сами орбиты, но и их семейства. Последние обычно определяются как совокупность орбит с одинаковыми элементами $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{\overline{k}}$ и произвольными $\epsilon_{\overline{k}+1}, \ldots, \epsilon_5$, $1 \leqslant \overline{k} < k$. Указанные семейства трактуются как точки в $\overline{k}$-мерном пространстве, $1 \leqslant \overline{k} < k$, называемым фактор-пространством по отношению к $\mathbb{H}$.

Оптимальным способом установления близости орбит является введение расстояния $\varrho(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, превращающего $\mathbb{H}$ и его фактор-пространства в метрические. Однако в прошлом веке пользовались так называемыми критериями Саутворта—Хокинза, Драммонда, Йопека [1–6]. Как выяснилось, ни один из этих критериев не является расстоянием, поскольку не удовлетворяет аксиоме треугольника метрического пространства [7, 8], хотя и удовлетворяет (по крайней мере в пространствах орбит с ограниченным эксцентриситетом) ослабленной аксиоме треугольника [9]. Между тем в этом веке было предложено несколько настоящих метрик, свойства их исследованы, о чем мы рассказывали на 30, 35 и 45-й конференции *Физика космоса* [7, 10, 11]. Нам кажется, пришло время забыть о несовершенных критериях и выбрать среди метрик лучшую. Эта метрика (и метрики в трех фактор-пространствах) описывается в настоящей статье.

Замечание. Метрики сравниваются по различным свойствам, наилучшая по всем свойствам вряд ли существует. Мы сознаем некоторую субъективность подхода. Возможно, через некоторое время появится более привлекательная метрика, что можно только приветствовать.

Основные определения

Пространство $\mathbb{X}$ называется метрическим, если в нем определена функция $\varrho(x_1, x_2)$, $x_s \in \mathbb{X}$, удовлетворяющая трем аксиомам метрического пространства [12, §9.1], [13]:

1. $\varrho(x_1, x_2) \geqslant 0$, причем $\varrho(x_1, x_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$;
2. $\varrho(x_1, x_2) = \varrho(x_2, x_1)$;
3. $\varrho(x_1, x_3) \leqslant \varrho(x_1, x_2) + \varrho(x_2, x_3)$ (аксиома треугольника).

Функцию ϱ называют *расстоянием*, или *метрикой*.

Различных пространств кеплеровых орбит существует бесконечно много. Важнейших — два: пространство всех орбит $\mathbb{H}^\star$ и пространство непрямолинейных орбит $\mathbb{H}$. Первое встречается редко в практике астрономических исследований, метрика там сложнее, и мы сосредоточим свое внимание на пространстве $\mathbb{H}$. Его главный недостаток (с математической точки зрения) — неполнота — не влияет на астрономические приложения.

Каждая орбита $\mathcal{E} \in \mathbb{H}$ однозначно определяется набором пяти элементов ϵ_k, за которые мы примем p, e, i, Ω, ω — фокальный параметр, эксцентриситет, наклон, долготу восходящего узла, аргумент перицентра. Обратно, набор элементов однозначно определяет орбиту с необходимыми оговорками. Именно, считаем $p > 0$, $e \geqslant 0$,

$0 \leqslant i \leqslant \pi$; при $i = 0$ или $i = \pi$ примем $\Omega = 0$; при $e = 0$ примем $\omega = 0$. С другой стороны, каждая орбита $\mathcal{E} \in \mathbb{H}$ взаимно-однозначно определяется двумя ортогональными векторами $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \neq 0$, пропорциональными вектору момента импульса и вектору Лапласа—Рунге—Ленца соответственно. Мы примем

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z), \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{p}, \quad |\mathbf{v}| = e\sqrt{p}, \tag{1}$$

$$\mathbf{uv} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0, \qquad |\mathbf{u}| > 0. \tag{2}$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_x &= \sqrt{p}\sin i \sin\Omega, & v_x &= e\sqrt{p}(\cos\omega\cos\Omega - \cos i \sin\omega \sin\Omega), \\ u_y &= -\sqrt{p}\sin i \cos\Omega, & v_y &= e\sqrt{p}(\cos\omega\sin\Omega + \cos i \sin\omega \cos\Omega), \\ u_z &= \sqrt{p}\cos i, & v_z &= e\sqrt{p}\sin i \sin\omega. \end{aligned} \tag{3}$$

Пространство $\mathbb{H}$ открыто, локально-компактно, линейно-связно без особых точек. Оно вложено в $\mathbb{R}^6$, являясь 5-мерной поверхностью второго порядка (конусом) $\mathbf{uv} = 0$ без 3-мерной плоскости $\mathbf{u} = 0$. Определим расстояние в пространстве $\mathbb{H}$ евклидовым расстоянием в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^6$:

$$\varrho_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \sqrt{\frac{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2}{L}}, \tag{4}$$

где $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(\mathcal{E}_k)$; $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}(\mathcal{E}_k)$; L — произвольный положительный масштабный множитель. Подчеркнем, что функция (4) определена и не имеет особенностей во всем пространстве $\mathbb{H}$, включающем все эллиптические, параболические и гиперболические орбиты.

Замечание 1. Мы сохраняем нумерацию метрик из [8].

Замечание 2. Можно положить $L = 1$, и тогда физическая размерность ϱ_2 будет корнем из единицы длины. Например,

$$\begin{aligned} (\text{а. е.})^{1/2} &= 153.149\,264\,8 R_{\oplus}^{1/2} = 386.778\,891\,7\,(\text{Мм})^{1/2} = \\ &= 12\,231.022\,49\,(\text{км})^{1/2} = 386\,778.891\,7\,(\text{м})^{1/2}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $R_{\oplus} = 6\,378\,164\,222$ мм — экваториальный радиус общего земного эллипсоида [14]. Разумеется, можно предложить метрику, использующую единицы длины. Достаточно в (1, 2, 3) заменить $\sqrt{p}$ на p. Но мы не будем делать этого ради сохранения физического смысла вектора $\mathbf{u}$ — момента импульса с точностью до постоянного нормирующего множителя.

Если желательно сделать ϱ_2 безразмерным, следует придать L размерность длины. Важно, что L здесь является лишь масштабным множителем и не играет роли при сравнении расстояний в каком-либо естественном ансамбле орбит. Для метеороидных потоков разумно считать $L = 1$ а. е., а для транснептунных объектов $L = 40$ а. е. Ниже считаем $L = 1$.

Приведем формулу для определения метрики по известным элементам. Все предложенные нами расстояния ϱ_k вычисляются по формуле

$$\varrho_k^2 = (1 + e_1^2)p_1 + (1 + e_2^2)p_2 - 2\zeta_k\sqrt{p_1 p_2}, \tag{6}$$

где ζ_k зависит от элементов e, i, Ω, ω двух орбит. При $k = 2$

$$\zeta_2 = \cos I + e_1 e_2 \cos P. \tag{7}$$

Здесь I — угол между векторами $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$; P — угол между векторами $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$. Если хотя бы одна из орбит круговая, то угол P не определен, но $\zeta_2 = \cos I$ и в этом случае определена однозначно. Выпишем формулы для косинусов:

$$\cos I = c_1 c_2 + s_1 s_2 \cos\Delta, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\cos P = s_1 s_2 \sin\omega_1 \sin\omega_2 + (\cos\omega_1 \cos\omega_2 + c_1 c_2 \sin\omega_1 \sin\omega_2)\cos\Delta +\\ + (c_2 \cos\omega_1 \sin\omega_2 - c_1 \sin\omega_1 \cos\omega_2)\sin\Delta,\end{aligned} \tag{9}$$

где $c = \cos i$; $s = \sin i$; $\Delta = \Omega_1 - \Omega_2$.

Даламберовость [15] функции ϱ_2^2 относительно пар (s, Ω) и $(e, \Omega + + \omega)$ доказывается элементарно.

Метрики в фактор-пространствах

Напомним определение. Пусть в пространстве $\mathbb{X}$ введена некоторая эквивалентность. Фактор-пространством $\mathbb{Y}$ называется множество, элементами y которого служат классы элементов $x \in \mathbb{X}$, эквивалентных друг другу. Например, на сфере можно отождествить точки с одинаковой широтой. Фактор-пространством будет множество параллелей (или, что то же, множество их широт, т. е. отрезок $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$). При отождествлении точек с одинаковой долготой фактор-пространством будет множество меридианов (или, что то же, множество их долгот, т. е. единичная окружность, экватор).

Для метрического пространства его фактор-пространство метризуемо введением метрики Хаусдорфа [16]. Последняя сложна, и мы будем использовать другие метрики.

Вернемся к пространству $\mathbb{H}$. Часто, хотя и не всегда, узлы орбит имеют большие вековые возмущения, тогда как остальные четыре элемента орбиты меняются незначительно. Полезно поэтому иногда игнорировать узлы, или, что то же, отождествлять орбиты с одинаковыми p, e, i, ω вне зависимости от значений Ω. Это достигается введением 4-мерного фактор-пространства $\mathbb{H}_3$, элементом которого является класс орбит с фиксированными p, e, i, ω и всевозможными значениями Ω. В фактор-пространстве $\mathbb{H}_3$ введем расстояние

$$\varrho_3 = \min_{\Omega_1, \Omega_2} \varrho_2 \,. \tag{10}$$

Согласно [8] оно дается формулой (6) при

$$\zeta_3 = c_1 c_2 + e_1 e_2 s_1 s_2 \sin\omega_1 \sin\omega_2 + \sqrt{s_1^2 s_2^2 + e_1 e_2 \xi} \,, \tag{11}$$

где

$$\xi = e_1 e_2 (1 - s_1^2 \sin^2\omega_1)(1 - s_2^2 \sin^2\omega_2) + \\ + 2 s_1 s_2 (\cos\omega_1 \cos\omega_2 + c_1 c_2 \sin\omega_1 \sin\omega_2).$$

Возможна ситуация, когда быстрее изменяются направления перицентров. Напомним, что перигей орбиты Луны движется существенно быстрее узла. Поэтому разумно ввести 4-мерное фактор-пространство $\mathbb{H}_4$, элементом которого является класс орбит с фиксированными p, e, i, Ω и всевозможными значениями ω. В фактор-пространстве $\mathbb{H}_4$ введем расстояние

$$\varrho_4 = \min_{\omega_1, \omega_2} \varrho_2 \,. \tag{12}$$

Согласно [8] оно дается формулой (6) при

$$\zeta_4 = e_1 e_2 + \cos I. \tag{13}$$

Можно идти и дальше, игнорируя и узлы, и перицентры. Достаточно ввести трехмерное фактор-пространство $\mathbb{H}_5$, элементом которого является класс орбит с фиксированными p, e, i и всевозможными значениями Ω, ω. В фактор-пространстве $\mathbb{H}_5$ ведем расстояние

$$\varrho_5 = \min_{\Omega_1, \Omega_2, \omega_1, \omega_2} \varrho_2 \,. \tag{14}$$

Согласно [8] оно дается формулой (6) при

$$\zeta_5 = e_1 e_2 + \cos(i_1 - i_2). \tag{15}$$

Наконец, встречается ситуация, когда узлы и перицентры имеют большие вековые возмущения, тогда как остальные три элемента орбиты и долгота перицентра $\varpi = \Omega + \omega$ меняются незначительно. Полезно поэтому ввести 4-мерное фактор-пространство $\mathbb{H}_6$, элементом которого является класс орбит с фиксированными p, e, i, ϖ. Долготы узлов и аргументы перицентров могут принимать произвольные значения, но сумма их фиксирована. В фактор-пространстве $\mathbb{H}_6$ введем расстояние

$$\varrho_6 = \min \varrho_2 \,. \tag{16}$$

Здесь минимум берется по $\Omega_1, \Omega_2, \omega_1, \omega_2$ при условиях

$$\Omega_1 + \omega_1 = \varpi_1 \,, \qquad \Omega_2 + \omega_2 = \varpi_2 \,,$$

где $\varpi_1 \,, \varpi_2$ фиксированы. Как всегда, ϱ_6 дается формулой (6). Однако в отличие от всех разобранных случаев элементарной формулы для ζ_6 не существует. Приведем алгоритм расчета ζ_6 [17]:

1. Если хотя бы одна из орбит круговая, то

   $$\zeta_6 = \cos(i_1 - i_2).$$

2. Пусть хотя бы одна из орбит (дадим ей номер 2) лежит в основной плоскости и описывает прямое движение, так что $s_2 = 0$, $c_2 = 1$. Тогда

   $$\zeta_6 = c_1 + \frac{1}{2}(1 - c_1) e_1 e_2 + \frac{1}{2}(1 + c_1) e_1 e_2 \cos \varpi.$$

3. Пусть хотя бы одна из орбит (дадим ей номер 2) лежит в основной плоскости и описывает обратное движение, так что $s_2 = 0$, $c_2 = -1$. Тогда

   $$\zeta_6 = -c_1 + e_1 e_2 \,.$$

4. Пусть $e_1 e_2 s_1 s_2 \neq 0$,

   $$i_1 = i_2 \,, \qquad \sin \varpi = 0, \tag{17}$$

   где $\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$.

a) При $\mu = 1$ и $\mu = -1$ находим все вещественные корни $y_n(\mu)$ уравнения

$$[(1 + c_1)(2 + \mu e_1 e_2) \cos \varpi + e_1 e_2 (1 + c_1) + \\ + 2 e_1 e_2 (1 - c_1) \cos \varpi \cos y] \sin y = 0 \quad (18)$$

на дуге $-\pi < y \leqslant \pi$. Два из них, $y = 0$ и $y = \pi$, тривиальны и не зависят от μ. Всего получаем не более шести различных чисел $y_n(\mu)$.

b) По формуле

$$\zeta_2(x, y) = A_0 + A_1 \cos(\varpi - y) + A_2 \cos y - A_2 \cos x + \\ + B_1 \cos(\varpi - x - y) + B_2 \cos(\varpi - 2y) + B_3 \cos \varpi + B_4 \cos(\varpi + x - y) \quad (19)$$

находим $\zeta_2(x(\mu), y_n(\mu))$, где $x(\mu)$ дается соотношениями $\cos x = \mu$, $\sin x = 0$. Коэффициенты тригонометрического многочлена (19) равны

$$A_0 = c_1 c_2\,, \qquad A_1 = s_1 s_2\,, \qquad 2A_2 = e_1 e_2 s_1 s_2\,,$$

$$\begin{aligned} 4B_1 &= e_1 e_2 (1 - c_1)(1 + c_2), \\ 4B_2 &= e_1 e_2 (1 - c_1)(1 - c_2), \\ 4B_3 &= e_1 e_2 (1 + c_1)(1 + c_2), \\ 4B_4 &= e_1 e_2 (1 + c_1)(1 - c_2). \end{aligned}$$

c) Искомая величина ζ_6 равна наибольшему из чисел $\zeta_2(x(\mu), y_n(\mu))$.

5. Пусть $e_1 e_2 s_1 s_2 \neq 0$ и хотя бы одно из условий (17) нарушено (случай общего положения).

a) При $\mu = 1$ и $\mu = -1$ находим все вещественные корни $y_n(\mu)$ уравнения

$$b_0 + b_1 \cos y + b_2 \sin y + b_3 \cos 2y + b_4 \sin 2y + b_5 \cos 3y + b_6 \sin 3y = 0.$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
b_0 =& e_1 e_2 s_1^2 s_2^2 \sin\varpi, \\
b_1 =& 2 s_1 s_2 (1 - c_1 c_2)(2 + \mu e_1 e_2) \sin\varpi, \\
b_2 =& - s_1 s_2 [e_1 e_2 (1 + c_1 + c_2 - 3 c_1 c_2) + \\
& + 2(1 - c_1 c_2)(2 + \mu e_1 e_2) \cos\varpi], \\
b_3 =& (1 - c_1)(1 - c_2)[e_1 e_2 (1 - c_1 - c_2 - 3 c_1 c_2) \sin\varpi - \\
& - (1 + c_1)(1 + c_2)(2 + \mu e_1 e_2) \sin 2\varpi], \\
b_4 =& (1 - c_1)(1 - c_2)[- e_1 e_2 (1 - c_1 - c_2 - 3 c_1 c_2) \cos\varpi + \\
& + (1 + c_1)(1 + c_2)(2 + \mu e_1 e_2) \cos 2\varpi], \\
b_5 =& - e_1 e_2 s_1 s_2 (1 - c_1)(1 - c_2) \sin 2\varpi, \\
b_6 =& e_1 e_2 s_1 s_2 (1 - c_1)(1 - c_2) \cos 2\varpi.
\end{aligned}
$$

При каждом μ корней $y_n(\mu)$ не более 6.

b) Каждому корню $y_n(\mu)$ отвечает ровно одно значение $x_n(\mu)$, вычисляемое по формулам

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \mu \frac{s_1 s_2 - (1 - c_1 c_2) \cos(y - \varpi)}{(1 - c_1 c_2) - s_1 s_2 \cos(y - \varpi)}, \\
\sin x &= \mu \frac{(c_2 - c_1) \sin(y - \varpi)}{(1 - c_1 c_2) - s_1 s_2 \cos(y - \varpi)}.
\end{aligned} \qquad (20)
$$

Получаем несколько (не более 12) точек вида $(x_n(\mu), y_n(\mu))$.

c) Для каждой пары $(x_n(\mu), y_n(\mu))$ определяем ζ_2 по формуле (19).

d) Искомая величина ζ_6 равна наибольшему из чисел $\zeta_2(x_n(\mu), y_n(\mu))$.

Заключение

Функция ϱ_2 удовлетворяет всем приведенным выше аксиомам метрического пространства, что было показано при ее введении в статьях [7, 8]. Однако минимум расстояния по игнорируемым элементам фактор-пространства не всегда определяет там расстояние. Контрпримеры приведены в [7]. Там же установлено, что ϱ_5 служит расстоянием. Выполнимость аксиом расстояния для ϱ_3, ϱ_4 доказана в [18].

Для ϱ_6 справедливость аксиом 1 и 2 устанавливается без большого труда. Вопрос же о справедливости аксиомы треугольника остается пока открытым.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 18-12-00050).

Библиографические ссылки

1. *Southworth R., Hawkins G.* Statistics of meteor streams // Smithson. Contrib. Astrophys. — 1963. — Vol. 7. — P. 261—285.
2. *Drummond J. D.* On meteor/comet orbital discriminant D // Proc. Southwest Regional Conf. Astron. Astrophys. : 5. — Little Rock AR : P. F. Gott, P. S. Riherd, Eds., 1979. — P. 83—86.
3. *Drummond J. D.* A test of comet and meteor shower associations // Icarus. — 1981. — Vol. 45. — P. 545—543.
4. *Jopek T. J.* Remarks on the Meteor Orbital Similarity D-Criterion // Icarus. — 1993. — Vol. 106, iss. 2. — P. 603—607.
5. *Jopek T. J., Froeschlé Cl.* Remarks on the Meteor Orbital Similarity D-Criterion // Icarus. — 1993. — Vol. 106, iss. 2. — P. 603—607.
6. *Калинин Д. А.* О критериях общности в кометных метеороидных комплексах // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. — 2013. — Т. 5. — С. 3—9.
7. *Холшевников К. В.* О метриках в пространствах кеплеровских орбит // Физика космоса : тр. 45-й Международ. студ. науч. конф., Екатеринбург, 1 — 5 февр. 2016 г. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. — С. 168—184.
8. *Kholshevnikov K. V., Kokhirova G. I., Babadzhanov P. B., Khamroev U. H.* Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2016. — Vol. 462, iss. 2. — P. 2275—2283.
9. *Milanov D. V., Milanova Yu. V., Kholshevnikov K. V.* Relaxed triangle inequality for the orbital similarity criterion by Southworth and Hawkins and its variants // Celest. Mech. Dyn. Astr. — 2019. — Vol. 131:5, iss. 1.
10. *Холшевников К. В.* Топология и метрика пар кеплеровских орбит // Физика космоса : тр. 30-й Международ. студ. науч. конф., Екатеринбург, 29 янв. — 2 февр. 2001 г. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2001. — С. 145—153.
11. *Холшевников К. В.* Пространства кеплеровских орбит // Физика космоса : тр. 35-й Международ. студ. науч. конф., Екатеринбург,

30 янв. — 3 февр. 2006 г. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2006. — С. 186—197.

12. *Зорич В. А.* Математический анализ. Ч. 2. — М. : Наука, 1984. — С. 640.

13. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — М. : Наука, 1984. — С. 831.

14. *Аллен К. У.* Справочник по математике. — М. : Мир, 1977. — С. 25.

15. *Холшевников К. В.* Даламберовские функции в небесной механике // Астрон. журн. — 1997. — Т. 74, вып. 1. — С. 146—153.

16. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. — М. : КомКнига, 2006. — С. 304.

17. *Холшевников К. В., Щепалова А. С., Джазмати М. С.* Об одном фактор-пространстве кеплеровых орбит // Вестн. С.-Петербург. ун-та. — 2020. — Т. 7(65), вып. 1. — С. 165—174.

18. *Milanov D. V.* Metrics in Keplerian orbits quotient spaces // Celest. Mech. Dyn. Astr. — 2018. — Vol. 130, iss. 3. — P. 75—94.